第 33 講　関数総合(4)

1 座標平面上の原点 O を通り，x 軸とのなす角が 30°，傾きが正の直線と，放物線 $y=x^2$ との交点で，O と異なるものを A とおく．

(1) 点 A の座標を求めよ．

(2) 線分 OA を 1 辺とする正方形 OABC をつくる．ただし，点 C は第 2 象限にとる．点 B，C の座標をそれぞれ求めよ．

(3) 直線 OB に垂直で，放物線 $y=x^2$ に接する直線の方程式を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 円 $C:x^2+y^2+2x-6y+k=0$ について考える．原点Oから C に引いた2本の接線が直交するとき，k の値を求めよ．

［2］ 原点Oを中心とする半径3の円を C とする．点 $\mathrm{A}(5\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ を通り円Cに接する直線で傾きが正のものを l とし，C と l の接点をPとする．

(1) OA，APを求めよ．

(2) 直線OAと x 軸のなす角を $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，$\angle\mathrm{OAP}=\beta$ とおく．$\tan\alpha$，$\tan\beta$ を求めよ．

(3) l の傾きを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 座標平面上に，2 つの放物線 C_1 : $y=(x-t)^2+t$，C_2 : $y=-x^2+4$ がある．ただし，t は実数とする．

(1) C_1，C_2 が異なる 2 点で交わるとき，t の値の範囲を求めよ．

(2) (1)のとき，C_1 と C_2 の 2 つの交点を結ぶ線分の中点の軌跡を図示せよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第33講　関数総合(4)

[1]　円 $x^2+y^2=4$ の外部にある点 P$(a,\ 1)$ から，この円に引いた2本の接線が直交するときの a の値を次のように求める．x 軸に垂直な接線は条件を満たさないことから，点Pを通る円の接線を $y=m(x-a)+1$ とおくと，円の中心と直線の距離が半径と等しいことから，m は2次方程式 $(a^2-\boxed{ア})m^2-\boxed{イ}am-\boxed{ウ}=0$ ……①

の2解である．2本の接線が直交するのは，①の2解の積が $\boxed{エオ}$ のときより，

$a=\pm\sqrt{\boxed{カ}}$ である．

[2]　放物線 $y=x^2+1$ と直線 $y=ax$ が異なる2点P，Qで交わるような実数 a の値の範囲は，$a<-\boxed{キ}$，$\boxed{ク}<a$ である．線分PQの中点をMとすると，Mは放物線 $y=\boxed{ケ}x^2$ の $x<-\boxed{コ}$，$\boxed{サ}<x$ の部分に存在する．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

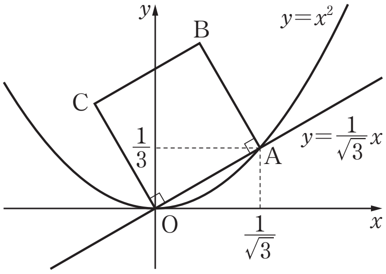
第 33 講　関数総合(4)

1　座標平面上の原点Oを通り，x 軸とのなす角が 30°，傾きが正の直線と，放物線 $y=x^2$ との交点で，Oと異なるものをAとおく．

(1)　点Aの座標を求めよ．

(2)　線分OAを1辺とする正方形OABCをつくる．ただし，点Cは第2象限にとる．点B，Cの座標をそれぞれ求めよ．

(3)　直線OBに垂直で，放物線 $y=x^2$ に接する直線の方程式を求めよ．



(1)　原点Oを通り，x 軸とのなす角が 30° で傾きが正の直線は，$y=(\tan 30°)x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ である．

この直線と放物線 $y=x^2$ との共有点のうち，原点Oと異なるものの x 座標は

$x^2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$　かつ　$x\neq 0$　より　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって求める点Aの座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{3}\right)}$

(2)　点Cの座標を $(s,\ t)$ とすると，OA⊥OCより

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{t}{s}=-1$　　よって　$t=-\sqrt{3}s$

$\mathrm{OC}=\mathrm{OA}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$　より　$s^2+t^2=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

よって　$4s^2=\dfrac{4}{9}$　　$s^2=\dfrac{1}{9}$　　$s<0$ より　$s=-\dfrac{1}{3}$　　したがって　$\mathrm{C}\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}$

また，点Bの座標を $(a,\ b)$ とすると，線分OBと線分ACの中点が一致するので

$\dfrac{a+0}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{3}\right)$，$\dfrac{b+0}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

よって　$a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}$　　したがって　$\mathrm{B}\boldsymbol{\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}+1}{3}\right)}$

(3)　直線OBの傾きは $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ より　求める直線の傾きは

$-\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=-\dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}=\sqrt{3}-2$

また，$y=x^2$　より　$y'=2x$　　$2x=\sqrt{3}-2$　より　$x=\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}$

よって求める直線の方程式は

$y=(\sqrt{3}-2)\left(x-\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{3}-2}{2}\right)^2=(\sqrt{3}-2)x-\dfrac{(\sqrt{3}-2)^2}{2}+\dfrac{(\sqrt{3}-2)^2}{4}$ より

$\boldsymbol{y=(\sqrt{3}-2)x+\sqrt{3}-\dfrac{7}{4}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ 円 $C：x^2+y^2+2x-6y+k=0$ について考える．原点 O から C に引いた 2 本の接線が直交するとき，k の値を求めよ．

円 $C：(x+1)^2+(y-3)^2=-k+10$ の接線のうち，原点 O を通るものを $y=mx$ つまり $mx-y=0$ とおくと

円の中心 $(-1,\ 3)$ から接線 $mx-y=0$ への距離は円の半径に等しいから

$$\frac{|-m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{-k+10} \quad \text{より} \quad (m+3)^2=(-k+10)(m^2+1)$$

$$(9-k)m^2-6m+1-k=0$$

この方程式の 2 解が 2 接線の傾きであり，直交条件より 2 解の積が -1 のときである．

解と係数の関係より $\dfrac{1-k}{9-k}=-1$　　よって　$\boldsymbol{k=5}$

2 ［2］ 原点 O を中心とする半径 3 の円を C とする．点 $A(5\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ を通り円 C に接する直線で傾きが正のものを l とし，C と l の接点を P とする．

(1) OA，AP を求めよ．

(2) 直線 OA と x 軸のなす角を $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，$\angle OAP=\beta$ とおく．$\tan\alpha$，$\tan\beta$ を求めよ．

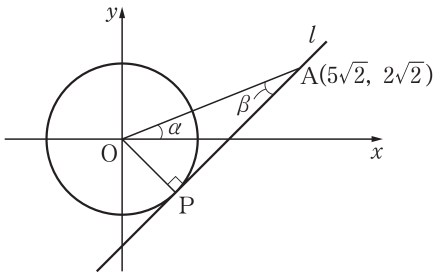
(3) l の傾きを求めよ．

(1) $OA=\sqrt{(5\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2}=\boldsymbol{\sqrt{58}}$

△OAP で三平方の定理より　$AP=\sqrt{OA^2-OP^2}=\sqrt{(\sqrt{58})^2-3^2}=\boldsymbol{7}$

(2) 点 A の座標を利用して　$\tan\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

直角三角形 OAP にて　$\tan\beta=\dfrac{OP}{AP}=\boldsymbol{\dfrac{3}{7}}$



(3) 求める l の傾きは

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2}{5}+\frac{3}{7}}{1-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}}=\boldsymbol{1}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 座標平面上に，2つの放物線 $C_1：y=(x-t)^2+t$，$C_2：y=-x^2+4$ がある．ただし，t は実数とする．
(1) C_1，C_2 が異なる2点で交わるとき，t の値の範囲を求めよ．
(2) (1)のとき，C_1 と C_2 の2つの交点を結ぶ線分の中点の軌跡を図示せよ．

(1) C_1 と C_2 の式より y を消去して　$(x-t)^2+t=-x^2+4$

$2x^2-2tx+t^2+t-4=0$　……①

この方程式の判別式を D とすると，C_1 と C_2 が異なる2点で交わるのは $D>0$ のとき．

$\dfrac{D}{4}=t^2-2(t^2+t-4)>0$　　$t^2+2t-8<0$　　$(t+4)(t-2)<0$

よって　$\boldsymbol{-4<t<2}$

(2) (1)のとき，C_1 と C_2 の交点の x 座標を α，β とすると，α，β は方程式①の2解である．

よって解と係数の関係より　$\alpha+\beta=t$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{2}(t^2+t-4)$

このとき，2つの交点の中点を $(X,\ Y)$ とすると

$X=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{t}{2}$　……②

$Y=\dfrac{(-\alpha^2+4)+(-\beta^2+4)}{2}=\dfrac{-(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta+8}{2}=\dfrac{-t^2+(t^2+t-4)+8}{2}$

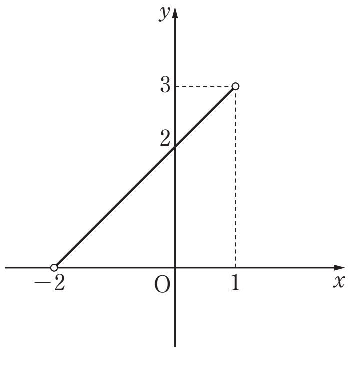
$=\dfrac{t+4}{2}$　……③

②より　$t=2X$　　これを③に代入して　$Y=\dfrac{2X+4}{2}=X+2$

また，(1)より　$-4<t<2$　つまり　$-4<2X<2$　より　$-2<X<1$

よって求める中点の軌跡は，直線 $y=x+2$ の $-2<x<1$ の部分．

図示すると右図．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第33講　関数総合(4)

［1］　円 $x^2+y^2=4$ の外部にある点 P$(a,\ 1)$ から，この円に引いた2本の接線が直交するときの a の値を次のように求める．x 軸に垂直な接線は条件を満たさないことから，点Pを通る円の接線を $y=m(x-a)+1$ とおくと，円の中心と直線の距離が半径と等しいことから，m は2次方程式 $(a^2-\boxed{ア})m^2-\boxed{イ}am-\boxed{ウ}=0$ ……①
の2解である．2本の接線が直交するのは，①の2解の積が $\boxed{エオ}$ のときより，
$a=\pm\sqrt{\boxed{カ}}$ である．

［2］　放物線 $y=x^2+1$ と直線 $y=ax$ が異なる2点P，Qで交わるような実数 a の値の範囲は，$a<-\boxed{キ}$，$\boxed{ク}<a$ である．線分PQの中点をMとすると，Mは放物線 $y=\boxed{ケ}x^2$ の $x<-\boxed{コ}$，$\boxed{サ}<x$ の部分に存在する．

解答例

［1］　$y=m(x-a)+1$　　$mx-y-ma+1=0$

$$\frac{|-ma+1|}{\sqrt{m^2+1}}=2 \qquad (ma-1)^2=4(m^2+1) \qquad (a^2-\mathbf{4})m^2-\mathbf{2}am-\mathbf{3}=0 \quad \cdots\cdots ①$$

①の2解が接線の傾きである．この2解の積が $\mathbf{-1}$ のとき条件を満たす．
よって解と係数の関係より

$$\frac{-3}{a^2-4}=-1 \qquad a^2-4=3 \qquad a^2=7 \qquad したがって\quad a=\pm\sqrt{\mathbf{7}}$$

［2］　$y=x^2+1$ と $y=ax$ より　$x^2+1=ax$　　$x^2-ax+1=0$　……①
x の方程式①が異なる2つの実数解をもてばよい．
よって　$(-a)^2-4>0$　　$(a+2)(a-2)>0$　　ゆえに　$a<-\mathbf{2},\ \mathbf{2}<a$　……②
②の条件のもとで，①の2つの実数解を α，β とすると，解と係数の関係より $\alpha+\beta=a$
このとき線分PQの中点Mの座標は

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{a\alpha+a\beta}{2}\right)=\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{a(\alpha+\beta)}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{2}\right)$$

と表される．よって M$(x,\ y)$ とすると　$x=\dfrac{a}{2}$　……③，$y=\dfrac{a^2}{2}$　……④
③より　$a=2x$　これを④に代入して　$y=2x^2$
また，②に代入して　$2x<-2,\ 2<2x$　つまり　$x<-1,\ 1<x$
よってMは放物線 $y=\mathbf{2}x^2$ の $x<\mathbf{-1},\ \mathbf{1}<x$ の部分に存在する．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。